平成１８年度　線形代数　中間試験　担当：樋口良之

学籍番号　〇〇〇〇〇

氏　　名　福大　理工

注意：試験問題は両面に記述されている．
薄い記述，ていねいではない記述は，採点の対象とならない．

１． $\mathbf{u} = (3-2i, 4i, 1+6i)$， $\mathbf{v} = (5+i, 2-3i, 5)$ とする．次の計算をしなさい．

（１） $(1-2i)\mathbf{u} + (3+i)\mathbf{v}$

(回答例)

$$(1-2i)\mathbf{u} + (3+i)\mathbf{v} = (-1-8i, 8+4i, 13+4i) + (14+8i, 9-7i, 15+5i) = (13, 17-3i, 28+9i)$$

（２） $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$

(回答例)

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (3-2i)\overline{(5+i)} + 4i\overline{(2-3i)} + (1+6i)\overline{(5)} = (3-2i)(5-i) + 4i(2+3i) + 5(1+6i)$$
$$= 15-3i-10i-2+8i-12+5+30i = 15-2-12+5-3i-10i+8i+30i = 6+25i$$

（３） $\|\mathbf{u}\|$

(回答例)

$\|\mathbf{u}\|^2 = 3^2 + (-2)^2 + 4^2 + 1^2 + 6^2 = 9+4+16+1+36 = 66$　したがって、$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{66}$

２． $A \in M(l, m; F)$， $B \in M(m, n; F)$ とするとき，${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ が成立することを証明せよ．

(回答例)

AB の i 行 j 列の成分は、$A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ とすると、$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$ となる。
転置行列の性質から、${}^t(AB)$ の j 行 i 列の成分は
$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$　・・・　（１）
となる。

一方で、${}^tB$ の j 行の成分は $(b_{1j} + b_{2j} + \cdots + b_{mj})$ であり、${}^tA$ の i 列の成分は $\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{im} \end{pmatrix}$ である。

このため、${}^tB\,{}^tA$ の j 行 i 列の成分は
$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$　・・・　（２）
となる。

したがって、式（１）と（２）は同値であり、${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ が成立する。

３． $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^n$ のとき， $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$ が成立することを証明せよ．

（回答例）

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n), \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in C^n$ とする。

また、 $\overline{\mathbf{v} + \mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}} + \overline{\mathbf{u}}$ 、 $\overline{\mathbf{v}\,\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}}\,\overline{\mathbf{u}}$ 、 $\overline{\overline{\mathbf{u}}} = \mathbf{u}$ という性質を用いる。

$$\overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}} = \overline{v_1 \overline{u_1} + v_2 \overline{u_2} + \cdots + v_n \overline{u_n}} = \overline{v_1}\,\overline{\overline{u_1}} + \overline{v_2}\,\overline{\overline{u_2}} + \cdots + \overline{v_n}\,\overline{\overline{u_n}} = \overline{v_1} u_1 + \overline{v_2} u_2 + \cdots + \overline{v_n} u_n$$

$$= u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \cdots + u_n \overline{v_n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

以上のことから $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$ が成立すると証明できる。

４． $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathbf{R}^3$ の３つのベクトルが次の値を持つときに，それらが従属であるか独立であるかを調べなさい． $\mathbf{u}_1 = (1, -2, -3), \ \mathbf{u}_2 = (2, 3, -1), \ \mathbf{u}_3 = (3, 2, 1)$

ヒント　 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n \in \mathbf{R}^n$ のベクトルについて $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \cdots + k_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ を考え，このとき，スカラー $k_1, k_2, \cdots, k_n$ のすべての値がゼロの値をとらないとき， $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n$ は従属であるという．また，スカラー $k_1, k_2, \cdots, k_n$ のすべての値がゼロの値をとるとき， $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n$ は独立であるという．

（回答例）

$k_1(1,-2,-3) + k_2(2,3,-1) + k_3(3,2,1) = \mathbf{0}$ を検証する。

$(k_1, -2k_1, -3k_1) + (2k_2, 3k_2, -k_2) + (3k_3, 2k_3, k_3) = (0,0,0)$

$(k_1 + 2k_2 + 3k_3, -2k_1 + 3k_2 + 2k_3, -3k_1 - k_2 + k_3) = (0,0,0)$

$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0$

$-2k_1 + 3k_2 + 2k_3 = 0$

$-3k_1 - k_2 + k_3 = 0$

この連立方程式では、方程式の数が３つで、３つの未知数があり、それぞれの未知数がゼロの解だけを持つ。したがって、 $\mathbf{u}_1 = (1, -2, -3), \ \mathbf{u}_2 = (2, 3, -1), \ \mathbf{u}_3 = (3, 2, 1)$ の３つのベクトルは独立である。