平成１８年度　線形代数　期末試験　担当：樋口良之

学籍番号　○○○○○

氏　　名　福大　理工

注意：試験問題は両面に記述されている．
薄い記述，ていねいではない記述は，採点の対象とならない．

１．$A \in M(n;F)$ に対して，$AB = BA = E$ となる行列 $B \in M(n;F)$ が存在するとき，A を正則行列，B を A の逆行列という．正則行列 A は，ただ一つの逆行列 B を持ち A^{-1} と表記する．A が正則行列であるための必要十分条件は，A と E を並べた行列 $(A \vdots E)$ が行（列）操作によって，$(E \vdots B)$ となることである．ここで E は単位行列である．

この解説に従い，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい．ヒント：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

（回答例）

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

したがって、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ となる。

２．W は $(a,b,c) \in R^3$ であり $a = 2b$ の性質を有する．W が R^3 の部分空間であることを証明しなさい．（回答例）

$v = (2b,b,c)$,　$w = (2b',b',c') \in R^3$,　$k,k' \in F$ とする。

$kv + k'w = k(2b,b,c) + k'(2b',b',c') = (2kb,kb,kc) + (2k'b',k'b',k'c') = (2(kb+k'b'),(kb+k'b'),kc+k'c')$

$kv + k'w$ は、第一成分が第二成分の２分の１となり、W の性質が保たれ、W は R^3 の部分空間である。

３．次の R^3 の３つベクトルは線形従属であるか線形独立であるか証明しなさい．

$(1,2,-3)$,　$(1,-3,2)$,　$(2,-1,5)$

（回答例）

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ となり、線形独立であることがわかる。

４．１　写像 $F(x,y,z) = (x+y+z, x+2y-z)$ が線形写像であることを証明しなさい．

（回答例）回答は裏面上部に続いてもかまわない．

$v = (a,b,c)$,　$w = (a',b',c') \in R^3$,　$k \in F$ とする。

$F(v) + f(w) = (a+b+c, a+2b-c) + (a'+b'+c', a'+2b'-c')$

$= ((a+a')+(b+b')+(c+c'),(a+a')+2(b+b')-(c+c')) = F(v+w)$

$F(kv) = (ka+kb+kc, ka+k2b-kc) = (k(a+b+c), k(a+2b-c)) = kF(v)$

したがって、$F(v)+f(w)=F(v+w)$ と $F(kv)=kF(v)$ が成立するため線形写像といえる。

４．２　F の像を生成し，その像の基底と次元を求めなさい．
（回答例）F の像は（1,0,0），(0,1,0), (0,0,1）を代入して生成されるものとする．
F の像は $F(1,0,0)=(1,1),\ F(0,1,0)=(1,2),\ F(0,0,1)=(1,-1)$ である。

$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ となり、基底は（1,1），(0,1)である。また、このときの次元は２次元である。

４．３　F の核を求め，次元と基底を求めなさい．
（回答例）
F の核は、$F(x,y,z)=(x+y+z,x+2y-z)=(0,0)$ で求められる。
$\begin{cases}x+y+z=0\\ x+2y-z=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\ y-2z=0\end{cases}$ となり、自由変数を z とし、次元は１次元となる。
このときの基底は $z=1$ とおくと、(-3,2,1)となる。

５．固有値と固有ベクトル，あるいは，固有値問題について，次の（回答）スペースが許す範囲で解説しなさい．具体的に課題を設定し，固有値と固有ベクトルを求めたり，理工学分野への応用について言及するなど自由に回答しなさい．
（回答）
自由に記述してください。