（回答例） 平成１９年度　線形代数　中間試験　担当：樋口良之

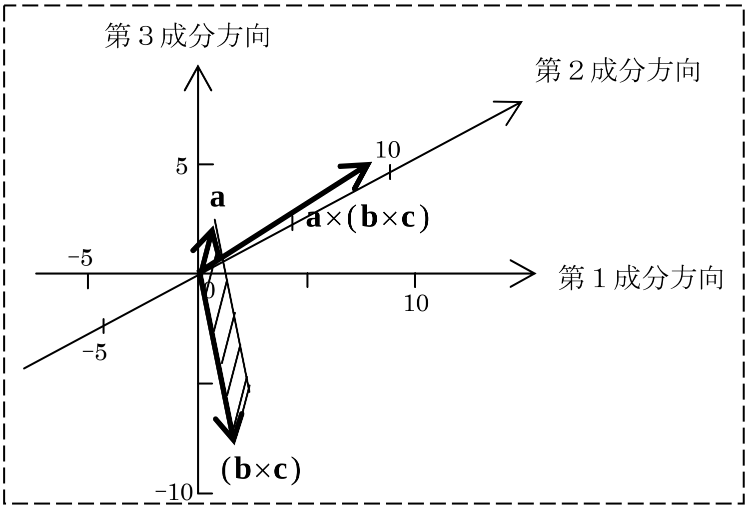
学籍番号　○○○○○

氏　　名　福大　線形

注意：試験問題は両面に記述されている．薄い記述，ていねいではない記述は，採点の対象とならない．

１．（１）から（３）に回答しなさい。$\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{R}^3$ において、外積 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は次のように示される。

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\a_3 & b_3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\a_1 & b_1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$



$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\4\\1\end{bmatrix},\mathbf{c}=\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}$ とするとき、

（１） $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ を求めなさい。

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\begin{bmatrix}2\\4\\1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0-1\\3-0\\2-12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\3\\-10\end{bmatrix}$$

（２） $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ を求めなさい。

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\3\\-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10-6\\-2-(-10)\\3-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\8\\2\end{bmatrix}$$

（３）右上の破線で囲まれた座標に、$\mathbf{a},(\mathbf{b}\times\mathbf{c}),\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ の３つのベクトルを記入し、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ の２つのベクトルで張られる部分（外積とも言える面積部分）を斜線で示しなさい。

２．$\mathbf{u},\mathbf{v}\in C^n$ のとき、$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\overline{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}$ が成立することを証明せよ。ただし、$\overline{\mathbf{v}+\mathbf{u}}=\overline{\mathbf{v}}+\overline{\mathbf{u}}$、$\overline{\mathbf{v}\,\mathbf{u}}=\overline{\mathbf{v}}\,\overline{\mathbf{u}}$、$\overline{\overline{\mathbf{u}}}=\mathbf{u}$ という基本的な性質は証明済みとし、回答に用いてもかまわない。

$\mathbf{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n),\quad \mathbf{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\in C^n$ とする。

また、$\overline{\mathbf{v}+\mathbf{u}}=\overline{\mathbf{v}}+\overline{\mathbf{u}}$、$\overline{\mathbf{v}\,\mathbf{u}}=\overline{\mathbf{v}}\,\overline{\mathbf{u}}$、$\overline{\overline{\mathbf{u}}}=\mathbf{u}$ という性質を用いる。

$$\overline{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}=\overline{v_1\overline{u_1}+v_2\overline{u_2}+\cdots+v_n\overline{u_n}}=\overline{v_1\overline{u_1}}+\overline{v_2\overline{u_2}}+\cdots+\overline{v_n\overline{u_n}}=\overline{v_1}u_1+\overline{v_2}u_2+\cdots+\overline{v_n}u_n$$
$$=u_1\overline{v_1}+u_2\overline{v_2}+\cdots+u_n\overline{v_n}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$$

以上のことから $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\overline{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}$ が成立すると証明できる。

３．次の行列の計算をしなさい。

（１）

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$ 計算できない。

（２）

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin^2\theta & 1 & 0 \\ \cos^2\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\theta & 1 & 0 \\ \cos^2\theta & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

４．次の問いに答えなさい。

（１）次の連立一次方程式を係数、変数、定数の３つの行列を使って表しなさい。

$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1$

$4x_2 + 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 2$

$6x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

（２）（１）の連立一次方程式を拡大行列で表しなさい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

（３）（２）で回答した拡大行列を、行列の基本操作により階段行列へ変換しなさい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

（４）（３）から、この連立一次方程式の解は、解なしであるか、あるいは、一意的な解となるか、あるいは、２つ以上の解となるか、回答しなさい。また、解がある場合には、解を示しなさい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1 & 5/6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 5/6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 2x_4,\quad x_2 = \dfrac{5}{6} + \dfrac{1}{3}x_4,\quad x_1 = 1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4,$ が解となり、x_4 の定め方で解は無数に存在するため、この連立一次方程式の解は２つ以上の解となる。

５．次に示す行列の逆行列を求めなさい。

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & 5 & 2 & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 8 & -3 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 9 & -3 & -7 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$