（回答例）平成１９年度　線形代数　期末試験　担当：樋口良之

学籍番号　１２３４５６７８

氏　　名　線形　共理

注意：試験問題は両面に記述されている．
薄い記述，ていねいではない記述は，採点の対象とならない．

１．$W=\{(1,1,2),\ (1,2,5),\ (5,3,4)\}$の３つのベクトルは$R^3$空間を基底できない。$\dim(W)$を求めなさい。また、３つのベクトルのうちから基底となる２つのベクトルを選び、さらに標準基底を１つ追加して、R^3空間の基底ベクトル３つを示しなさい。

（回答例）

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&5\\5&3&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&-2&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

したがって、$\dim(W)=2$となる。

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&5\\0&0&1\end{pmatrix}$$

したがって、R^3空間の基底ベクトル３つは、

$(1,1,2)$　$(1,2,5)$　$(0,0,1)$　となる。

２．写像$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3,x_1+2x_2-x_3)$が線形写像であることを証明しなさい。

（回答例）

$v=(a,b,c),\quad w=(a',b',c')\in R^3,\quad k\in R$とする。

$f(v)+f(w)=(a+b+c,a+2b-c)+(a'+b'+c',a'+2b'-c')$

$=((a+a')+(b+b')+(c+c'),(a+a')+2(b+b')-(c+c'))=f(v+w)$

$f(kv)=(ka+kb+kc,ka+k2b-kc)=(k(a+b+c),k(a+2b-c))=kf(v)$

したがって、$f(v)+f(w)=f(v+w)$と$f(kv)=kf(v)$が成立するため線形写像といえる。

３．R^3の空間において、$U=\{(a,b,0)\mid a,b\in R\}$と$W=\{(0,0,c)\mid c\in R\}$の２つのベクトル群がある。$U$と$W$は直和であるか、ないかを証明しなさい。

（回答例）

$\dim(U)=2$、　$\dim(W)=1$　である。

R^3の任意のベクトルは、すべてUとWの和で表される。

$\dim(R^3)=3=\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$

したがって、$\dim(U\cap W)=0$であり、$\dim(U\oplus W)=\dim(U)+\dim(W)$となるため、

UとWは直和である。

４．以下の破線四角部分に適切な数式や単語を入れて解説文を完成させなさい。

直線の方程式を$y=ax+b$と表現する。この方程式を行列で表現すると、$(y)=\boxed{\begin{pmatrix}x&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}}$となる。

xy平面上の２点$(x_1,y_1),\quad(x_2,y_2)$　を用いて行列で表現すると、

$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}x_1&1\\x_2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}}$　となり、$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}x_1&1\\x_2&1\end{pmatrix}^{-1}}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$へと変形できる。

５．以下の破線四角部分に適切な数式や単語を入れ、$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$の固有値と固有ベクトルを求めなさい。

固有値$\boxed{\lambda}$と固有ベクトル$\boxed{x}$の間には、次式が成立する。

$$Ax=\lambda x \qquad (1)$$

式（１）を変形し、次式を得る。

$$\boxed{(\ A-\lambda E\ )}\,x=0 \qquad (2)$$

ここで、Eは$\boxed{\text{単　位}}$行列である。式（２）は、連立方程式である。これが自明な解（$x=0$）以外の解を持つためには、式（２）の係数にあたる部分の行列が正則でなければよい。正則でないということは、逆行列が存在せず、係数部分にあたる行列の行列式がゼロとなる。すなわち、次式が成立する。

$$\left|A-\lambda E\right|=0 \qquad (3)$$

式（３）を用いて、λを導出する過程を次に示す。

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (2-\lambda)(3-\lambda)-(-2)(-1)=0 \qquad 6-5\lambda+\lambda^2-2=0 \qquad \lambda^2-5\lambda+4=0$$

$(\lambda-1)(\lambda-4)=0$　したがって、$\lambda=1, 4$となる。

$\lambda=\boxed{1}$のときの固有ベクトルxは、$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\boxed{C_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$となり、その導出過程は次のとおりである。

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -2 \\ -1 & 3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_1=2x_2$$

$x_2=C_1$とすると$x_1=2C_1$

また、$\lambda=\boxed{4}$のときのxは、$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\boxed{C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$となり、その導出過程は次のとおりである。

$$\begin{pmatrix} 2-4 & -2 \\ -1 & 3-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_1=x_2$$

$x_2=C_2$とすると$x_1=C_2$

通常、ベクトルxに係数行列Aを乗じてAxのようになると、Axはxとは異なる$\boxed{\text{方　向}}$や$\boxed{\text{大きさ}}$になる。

しかし、xが固有ベクトルのとき、Axはxとは異なる$\boxed{\text{大きさ}}$になることもあるが、$\boxed{\text{方　向}}$は変わらない。

６．線形結合あるいは線形関係式を用いて、線形従属と線形独立の定義を示しなさい。

（回答例）

線形空間Vの元$a_1, a_2, \cdots, a_k \in R^n$と$c_1, c_2, \cdots, c_k \in R$に対し、次式の$a_1, a_2, \cdots, a_k$の線形関係式において、

$c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_ka_k=0$

$c_1, c_2, \cdots, c_k$のどれかがゼロでなく線形関係式が成立する場合、$a_1, a_2, \cdots, a_k$は線形従属である。

また、$c_1, c_2, \cdots, c_k$のすべてがゼロのときのみ線形関係式が成立する場合、$a_1, a_2, \cdots, a_k$は線形独立である。